96

CONCOURS SPECIAL T' 1983

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

On appelle $\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathfrak{M}_n$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, a_{ij} l'élément de la i^e ligne et de la j^e colonne d'une matrice A de $\mathfrak{M}_n$.

On pose $\mathbb{N}_n = \{ 1, 2, 3, \ldots n \}$.

On rappelle que pour une base choisie B de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, toute matrice de $\mathfrak{M}_n$ est bijectivement associée à un endomorphisme de cet espace. On pourra noter « id » l'endomorphisme identique et I_n la matrice unité d'ordre n; ${}^tA$ et A^{-1} (éventuellement) sont respectivement la matrice transposée, et la matrice inverse de A.

PREMIÈRE PARTIE

On appelle « matrice de permutation » et on notera, P, une matrice de $\mathfrak{M}_n$ telle qu'il existe une permutation s de $\mathbb{N}_n$ vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p_{ij} = \delta_{i\,s(j)},\ \text{où}\ \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si}\quad k = l \\ 0 & \text{si}\quad k \neq l \end{cases}$$

1° Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice P et la valeur du déterminant de P. Calculer ${}^tPP$. Que peut-on conclure ?

On note $\mathfrak{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation de $\mathfrak{M}_n$. Quelle est la structure de $\mathfrak{P}_n$? Déterminer le nombre d'éléments de $\mathfrak{P}_n$.

2° Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}^n$, toujours rapporté à la base B, une droite de vecteurs invariants ainsi qu'un hyperplan stable par l'endomorphisme associé à un élément quelconque P de $\mathfrak{P}_n$.

3° Soit une matrice A de $\mathfrak{M}_n$, d'élément général a_{ij} et une matrice P de $\mathfrak{P}_n$. Déterminer les termes généraux de AP, ${}^tPA$, et $A' = {}^tPAP$.

DEUXIÈME PARTIE

On veut déterminer dans cette partie les matrices de $\mathfrak{M}_4$, orthogonales, de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

Montrer sur un exemple qu'il existe de telles matrices.

.../...

1° Déterminer les relations $(\mathcal{R})$ portant sur les réels a , b , c , d qui constituent une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit orthogonale.

Montrer que $(\mathcal{R})$ équivaut à $(\mathcal{R}_1)$:

$(\mathcal{R}_1)$: les nombres a , b , c , d sont racines réelles d'une équation de la forme :

$X^4 + \varepsilon X^3 - \varepsilon p X - p^2 = 0$, où ε est égal à $+1$ ou -1 et p est un réel appartenant à un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

Montrer que, à partir d'une solution A obtenue, pour une valeur de p convenablement choisie, on obtient toutes les solutions en utilisant les matrices P de $\mathfrak{P}_4$.

(l'ensemble $\mathfrak{P}_4$ étant déterminé dans la première partie, pour $n = 4$)

2° Pour $\varepsilon = +1$ et $p = \frac{4}{25}$, donner une solution A .

Troisième partie

Dorénavant et jusqu'à la fin du problème, on supposera $n = 3$. On appellera E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ rapporté à une base orthonormale directe $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans laquelle les composantes d'un vecteur pourront être notées (x , y , z) .

1° $\mathfrak{P}_3$ a six éléments, notés $P_0\ P_1\ P_2\ P'_1\ P'_2\ P'_3$; les trois premières matrices ayant un déterminant positif, P_0 étant I_3 . Caractériser, géométriquement, les endomorphismes qui leur sont respectivement associés dans E .

2° On considère, s'il en existe, une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

qui soit orthogonale. On pourra éventuellement la noter : $A(a , b , c)$. Exprimer les relations $(\mathcal{R})$ portant sur a , b et c , constituant une condition nécessaire et suffisante pour que $A(a , b , c)$ soit une solution.

Montrer que $(\mathcal{R})$ équivaut à $(\mathcal{R}_1)$:

$(\mathcal{R}_1)$: les nombres a , b , c sont racines réelles d'une équation du type (F) :

$$X^3 + \varepsilon X^2 - p = 0 , \quad \text{avec } \varepsilon = +1 \text{ et } p \in [0 , \alpha]$$
$$\text{ou } \varepsilon = -1 \text{ et } p \in [-\alpha , 0]$$

α est un réel à préciser.

Dans le cas général, on ne cherchera pas à résoudre (F) — on précisera pourtant, selon que $\varepsilon = +1$ ou -1 , les signes des racines non nulles de (F) .

3° Dans le cas où $A(a , b , c)$ vérifie $(\mathcal{R}_1)$, montrer que le déterminant, la trace et le polynôme caractéristique de A s'expriment simplement en fonction de ε et que, pour l'endomorphisme u de E , associé à A (dans la base B), il y a un vecteur propre (qu'on pourra prendre de norme 1, de première composante positive et qu'on notera $\vec{\Omega}$) indépendant du triplet de nombres (a , b , c) vérifiant $(\mathcal{R})$. Préciser la valeur propre qui lui est associée.

4° Si $\varepsilon = +1$, p convenablement choisi, et A une solution, préciser la nature géométrique de l'endomorphisme associé, dans B , à A .

Traitez la même question pour le cas : $\varepsilon = -1$.

. . . / . . .

Quatrième partie

Les conventions sont celles de la troisième partie.

On associe à E un espace affine $\mathcal{E}$, muni d'un repère $r = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$, dans r, seront notées : x, y, z.

On appelle $\mathcal{S}$ un autre espace affine euclidien, rapporté au repère $r' = \left(O'; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$. Les coordonnées d'un point de $\mathcal{S}$ dans r' seront notées X, Y, Z. On appellera « mouvement de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ » tout quadruplet d'applications (f, g_1, g_2, g_3), continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E} \times E^3$, tel que : pour tout t réel, $O' = f(t)$ et $\left\{\vec{I} = g_1(t), \vec{J} = g_2(t), \vec{K} = g_3(t)\right\}$ constitue une base orthonormée directe de E.

Donner la définition du « vecteur rotation instantané » et de « l'axe instantané de rotation et de glissement », à l'instant t, du mouvement de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$, sous réserve de leur existence. On les notera respectivement $\vec{\Omega}(t)$ et D (t).

1° Montrer que si a, b, c sont les fonctions continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(\mathcal{R}_1)$ de la troisième partie, avec $\epsilon = 1$, on peut définir un mouvement de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ par :

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{a}{2}\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \; ; \qquad \vec{I} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \; ; \qquad \vec{J} = b\vec{i} + c\vec{j} + a\vec{k} \; ; \qquad \vec{K} = c\vec{i} + b\vec{j} + b\vec{k}$$

Montrer que si : $t \longrightarrow \theta(t)$ est une fonction continûment dérivable à dérivée strictement positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que $\theta(0) = 0$, on peut prendre pour a la fonction $t \longrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\theta(t)$.

Déterminer b et c en fonction de θ en prenant pour b la fonction dont la dérivée est positive pour $\theta = 0$.

2° Les fonctions a, b, c étant ainsi définies, déterminer la nature de la trajectoire dans $\mathcal{E}$ du point O', avec le plus de précision possible.

Montrer qu'il est possible de déterminer une fonction θ de la variable t, à dérivée seconde continue, à dérivée première positive et telle que $\theta(0) = 0$, de façon que le mouvement de O' soit un mouvement à accélération centrale, de centre le point T de coordonnées dans r : $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3° On prend dorénavant $a = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos t$; $b = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t$; $c = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t$.

Vérifier que ces fonctions satisfont à toutes les conditions imposées au 1° et au 2°.

Donner alors les composantes de $\vec{\Omega}(t)$ d'une part dans $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, d'autre part dans $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$.

Donner un système d'équations, dans r, de la droite $d(t)$ de $\mathcal{E}$ puis un système d'équations, dans r', de la droite $d_1(t)$ de $\mathcal{S}$ qui coïncident, à l'instant t, avec D(t).

Déterminer les surfaces décrites respectivement dans $\mathcal{E}$ et dans $\mathcal{S}$ par ces droites, quand t décrit $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il s'agit de cylindres de révolution dont on donnera les axes et les rayons.

(On pourra se servir de changements convenables de bases orthonomées.)

FIN